**ΘΕΜΑ 1.** (1,5 μονάδες)

(1) Θεωρούμε ευθεία $(\epsilon)$ και σημείο $A \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι στην απόλυτη γεωμετρία, υπάρχει μοναδική ευθεία η οποία διέρχεται από το $A$ και είναι κάθετη στην ευθεία $(\epsilon)$.

**Λύση.** Θεωρία

(2) Δίνεται τετράπλευρο $ABCD$ με $AB \| CD$ και $AB = AD + BC$. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας $D$ του τετραπλεύρου, η οποία τέμνει την $AB$ σε σημείο $K$. Να αποδειχθεί ότι στην Ευκλείδεια γεωμετρία, η $CK$ είναι διχοτόμος της γωνίας $C$ του τετραπλεύρου.

**Λύση.** Αρχικά παρατηρούμε ότι το τρίγωνο $ADK$ είναι ισοσκελές ($K\widehat{D}C = A\widehat{K}D$ ως εντός και εναλλάξ και $A\widehat{D}K = A\widehat{K}D$ καθώς $DK$ διχοτόμος). Συνεπώς $AD = AK$. Αντικαθιστώντας στη σχέση $AB = AD + BC$ έχουμε ότι και το τρίγωνο $KBC$ είναι ισοσκελές. Το ζητούμενο έπεται από το γεγονός ότι $B\widehat{K}C = K\widehat{C}D$ ως εντός και εναλλάξ.

**ΘΕΜΑ 2.** (2 μονάδες)

(1) Να αποδειχθεί ότι στην υπερβολική γεωμετρία, για κάθε ευθεία $(\epsilon)$ και από κάθε σημείο εκτός αυτής, διέρχονται δύο τουλάχιστον ευθείες παράλληλες προς την ευθεία $(\epsilon)$.

**Λύση.** Θεωρία

(2) Στο υπερβολικό επίπεδο $\mathbb{H}^2$, θεωρούμε την Υ-ευθεία $(\epsilon) : x = 2$. Αν $z = 1 + i \in \mathbb{H}^2$, να προσδιορίσετε δύο Υ-ευθείες, οι οποίες διέρχονται από το $z$ και είναι παράλληλες προς την Υ-ευθεία $(\epsilon)$.

**Λύση.** Μια Υ-ευθεία παράλληλη προς την $(\epsilon)$ (η οποία να διέρχεται από το $z = 1+i$), είναι η $x = 1$. Για τον προσδιορισμό μιας δεύτερης, επιλέγουμε σημείο του ορίζοντα (έστω $z'$) τέτοιο ώστε $1 < \mathrm{Re}(z') < 2$. Θεωρούμε τον κύκλο (με κέντρο στον ορίζοντα), ο οποίος διέρχεται από τα σημεία $z, z'$. Το ημικύκλιο που είναι πάνω από τον ορίζοντα είναι η ζητούμενη Υ-ευθεία (η παραλληλία αποδεικνύεται παρατηρώντας τη διάταξη των σημείων τομής των ευθειών αυτών με τον ορίζοντα).

**ΘΕΜΑ 3.** (1,5 μονάδες)

Να βρεθεί η εικόνα του κύκλου $(x - \alpha)^2 + (y - 1)^2 = \varrho^2$ μέσω της αντιστροφής $C$, με κέντρο αντιστροφής το σημείο $(x_0, y_0) = (0, 0)$ και ακτίνα αντιστροφής $\varrho = 2$. Ως εφαρμογή αυτού, να βρεθεί η εικόνα του κύκλου $x^2 + (y - 1)^2 = 4$ ως προς τον κύκλο αντιστροφής $C$.

**Λύση.** Κάνουμε τις αντικαταστάσεις

$$x = \frac{4x'}{x'^2 + y'^2}, y = \frac{4y'}{x'^2 + y'^2}.$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις. Αν $\varrho^2 = 1 + \alpha^2$, τότε προκύπτει η ευθεία $y' = -\alpha x' + 2$. Αν $\varrho^2 \neq 1 + \alpha^2$, τότε προκύπτει κύκλος. Για την εφαρμογή, αντικαθιστούμε τις παραμέτρους $\alpha = 0, \varrho = 2$ στην εξίσωση κύκλου που βρήκαμε παραπάνω.

**ΘΕΜΑ 4.** (3 μονάδες)

(1) Να προσδιοριστεί ο Υ-κύκλος με διάμετρο το Υ-ευθύγραμμο τμήμα $AB$, όπου $A = i$ και $B = 1 + i$ είναι Υ-σημεία του υπερβολικού επιπέδου $\mathbb{H}^2$.

**Λύση.** Ο ζητούμενος Υ-κύκλος έχει κέντρο το Υ-μέσο του $AB$ (έστω αυτό $O$). Η ακτίνα του κύκλου προσδιορίζεται αν βρούμε την Υ-απόσταση του Υ-ευθυγράμμου τμήματος $AO$.

(2) Στο υπερβολικό επίπεδο $\mathbb{H}^2$, να σχεδιάσετε το Υ-τρίγωνο $ABC$, όπου $A = i$, $B = 1 + 2i$ και $C = -1 + 2i$. Στη συνέχεια, να εξετάσετε αν το Υ-τρίγωνο $ABC$ είναι ισόπλευρο.

**Λύση.** Βρίσκουμε ανά δύο τις Υ-ευθείες $AB, BC, AC$ (γνωρίζουμε ότι έχουν τη μορφή

$$(x - x_0)^2 + y^2 = \varrho^2$$

και γνωρίζουμε δύο σημεία τους, συνεπώς προσδιορίζονται άμεσα). Το καμπυλόγραμμο Υ-τρίγωνο $ABC$ είναι και το ζητούμενο. Υπολογίζοντας τις Υ-αποστάσεις των Υ-ευθυγράμμων τμημάτων $AB, BC, AC$, αποδεικνύεται ότι το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

**ΘΕΜΑ 5.** (2 μονάδες)
Θεωρούμε την Υ-ευθεία

$$Y_1 : x^2 + y^2 = 4.$$

Προσδιορίζοντας κατάλληλα Υ-σημεία $A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2) \in \mathbb{H}^2$, όπου $x_1 \neq x_2$, να βρείτε την Υ-ευθεία $Y_2$, η οποία διέρχεται από τα $A, B$ και είναι κάθετη στην $Y_1$. Στη συνέχεια να προσδιορίσετε δύο Υ-ορθογώνια τρίγωνα.

**Λύση.** Γνωρίζουμε ότι κάθε κύκλος που διέρχεται από δύο αντίστροφα σημεία (ως προς κάποια αντιστροφή), τέμνει τον κύκλο αντιστροφής ορθογώνια. Λαμβάνουμε τυχαίο σημείο $A = (x_0, y_0) \in \mathbb{H}^2$ το οποίο να είναι εσωτερικό του ημικυκλίου που σχηματίζει η Υ-ευθεία $Y_1$ (για παράδειγμα το $A = (1, 1)$). Θεωρώντας ως κύκλο αντιστροφής τον $x^2 + y^2 = 4$ (δλδ την Υ- ευθεία $Y_1$), έστω $A'$ η εικόνα του $A$. Ο κύκλος που διέρχεται από τα $A, A'$ και έχει κέντρο στον ορίζοντα (έστω $Y_2$) τέμνει ορθογώνια τον κύκλο $x^2 + y^2 = 4$. Η ζητούμενη κάθετη είναι η Υ-ευθεία $Y_2$. Λαμβάνοντας τις Υ-ευθείες $Y_1, Y_2$ και τυχούσες άλλες που τις τέμνουν, μπορούμε να πάρουμε Υ-ορθογώνια τρίγωνα.

---

* Οι λύσεις αυτές δεν είναι μοναδικές. Υπάρχουν κι άλλοι τρόποι επίλυσης όλων των παραπάνω θεμάτων.

---

Χρήστος Κ. Τατάκης

---